

Spis treści

Wstęp	v
1 Całka nieoznaczona	1
1.1 Wprowadzenie	2
1.2 Całkowanie funkcji potęgowych i wielomianów	4
1.3 Całkowanie z wykorzystaniem wzorów podstawowych	6
1.4 Dwa użyteczne wzory	7
1.5 Całkowanie przez części	9
1.6 Całkowanie przez podstawienie	10
1.7 Całkowanie funkcji wymiernych	12
1.7.1 Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju	14
1.7.2 Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju	14
1.7.3 Całkowanie dowolnych funkcji wymiernych	18
1.7.4 Wzory rekurencyjne dla funkcji wymiernych	22
1.8 Całkowanie funkcji wykładniczych i logarytmicznych	24
1.8.1 Całkowanie funkcji postaci $W_n(x)e^x$	24
1.8.2 Całkowanie funkcji postaci $W_n(x)\ln(ax)$	25
1.9 Całkowanie niektórych funkcji niewymiernych	26
1.9.1 Całki typu $\int \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} dx$	26
1.9.2 Całki funkcji zawierających pierwiastek kwadratowy z trójmianu kwadratowego	28
1.10 Całkowanie funkcji trygonometrycznych	39
1.10.1 Obliczanie całek postaci $\int \sin^m x \cos^n x dx$	39
1.10.2 Obliczanie całek postaci $\int R(\sin x, \cos x) dx$	40
1.10.3 Wzory rekurencyjne dla funkcji trygonometrycznych	41
1.10.4 Obliczanie całek postaci $\int W_n(x) \sin kx dx$ oraz $\int W_n(x) \cos kx dx$	44
1.11 Funkcje niecałkowalne elementarnie	45

1.12	Zadania rozwiązane	45
1.13	Zadania do samodzielnego rozwiązania	54
1.14	Wskazówki do zadań	60
1.15	Odpowiedzi do zadań	65
2	Całka oznaczona	73
2.1	Wprowadzenie	73
2.1.1	Definicja i własności całki oznaczonej	73
2.1.2	Interpretacja geometryczna całki oznaczonej	79
2.2	Zadania rozwiązane	81
2.3	Zadania do samodzielnego rozwiązania	82
2.4	Wskazówki do zadań	83
2.5	Odpowiedzi do zadań	84
3	Całki niewłaściwe	85
3.1	Wprowadzenie	85
3.1.1	Całki niewłaściwe I rodzaju	85
3.1.2	Całki niewłaściwe II rodzaju	88
3.2	Zadania rozwiązane	91
3.3	Zadania do samodzielnego rozwiązania	94
3.4	Wskazówki do zadań	95
3.5	Odpowiedzi do zadań	96
4	Zastosowanie całek oznaczonych	97
4.1	Wprowadzenie	97
4.2	Zastosowanie geometryczne całek	97
4.2.1	Pole figury płaskiej	98
4.2.2	Długość łuku krzywej płaskiej	102
4.2.3	Objętość bryły obrotowej	104
4.2.4	Pole powierzchni obrotowej	105
4.3	Zastosowanie fizyczne całek	106
4.3.1	Praca siły wzdłuż prostej	106
4.3.2	Masa figury płaskiej	107
4.3.3	Moment statyczny figury płaskiej	108
4.3.4	Środek ciężkości figury płaskiej	110
4.4	Zadania rozwiązane	111
4.5	Zadania do samodzielnego rozwiązania	120
4.6	Wskazówki do zadań	123
4.7	Odpowiedzi do zadań	127

5	Całki podwójne	129
5.1	Wprowadzenie	129
5.1.1	Obszary normalne	129
5.1.2	Całka podwójna	131
5.1.3	Całkowanie po obszarach normalnych	133
5.1.4	Zamiana zmiennych w całce podwójnej	137
5.2	Zadania rozwiązane	139
5.3	Zadania do samodzielnego rozwiązania	143
5.4	Wskazówki do zadań	146
5.5	Odpowiedzi do zadań	151
6	Całki krzywoliniowe na płaszczyźnie	153
6.1	Wprowadzenie	153
6.1.1	Parametryzacja krzywej	154
6.1.2	Całka krzywoliniowa nieskierowana	156
6.1.3	Całka krzywoliniowa skierowana	158
6.1.4	Niezależność całki krzywoliniowej skierowanej od drogi całkowania	161
6.1.5	Twierdzenie Greena	163
6.2	Zadania rozwiązane	166
6.3	Zadania do samodzielnego rozwiązania	169
6.4	Wskazówki do zadań	172
6.5	Odpowiedzi do zadań	173
7	Zastosowanie całek podwójnych i krzywoliniowych	175
7.1	Wprowadzenie	175
7.2	Zastosowania geometryczne	176
7.2.1	Pole obszaru płaskiego	176
7.2.2	Pole płata powierzchniowego w \mathbb{R}^3	177
7.2.3	Objętość bryły ograniczonej danymi powierzchniami	178
7.3	Zastosowania fizyczne	178
7.3.1	Masa i środek ciężkości krzywej materialnej	178
7.3.2	Momenty statyczne krzywej materialnej	179
7.3.3	Praca siły wzdłuż krzywej regularnej	180
7.4	Zadania do samodzielnego rozwiązania	181
7.5	Wskazówki do zadań	183
7.6	Odpowiedzi do zadań	184

8	Wielomiany i funkcje wymierne.	185
8.1	Wprowadzenie	185
8.1.1	Wielomiany	185
8.1.2	Schemat Hornera	193
8.1.3	Równania wielomianowe	196
8.1.4	Funkcje wymierne właściwe i niewłaściwe	196
8.1.5	Rozkład funkcji wymiernej niewłaściwej na sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej	197
8.1.6	Rozkład funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste	197
8.2	Zadania rozwiązane	199
8.3	Zadania do samodzielnego rozwiązania	205
8.4	Odpowiedzi do zadań	208
A	Przydatne wzory i stałe liczbowe	211
A.1	Alfabet grecki	212
A.2	Podstawowe wzory rachunku różniczkowego	213
A.2.1	Wzory ogólne	213
A.2.2	Wzory szczegółowe	213
A.3	Tablica wzorów całkowych	214
A.3.1	Wzory ogólne	214
A.3.2	Wzory szczegółowe	214
A.3.3	Rekurencyjne wzory całkowe	215
A.4	Przykłady parametryzacji ważniejszych krzywych płaskich	216
A.4.1	Parametryzacja odcinka	216
A.4.2	Parametryzacja okręgu	216
A.4.3	Parametryzacja elipsy	217
A.4.4	Parametryzacja cykloidy	217
A.4.5	Parametryzacja kardiody	218
A.4.6	Parametryzacja asteroidy	218
A.4.7	Parametryzacja paraboli Neila	218
A.4.8	Parametryzacja liścia Kartezjusza	219
A.4.9	Parametryzacja cissoidy Dioklesa	219
A.4.10	Parametryzacja strofoidy	220
A.5	Wzory skróconego mnożenia	220
A.6	Tożsamości trygonometryczne	221
A.7	Przybliżone wartości ważniejszych stałych	222