Rozdział 3

Całki niewłaściwe

3.1 Wprowadzenie

Omawiane w poprzednim rozdziale całki oznaczone są całkami funkcji ciągłych na przedziale domkniętym, a więc funkcji ograniczonych na przedziale skończonym. Wiele zagadnień praktycznych sprowadza się jednak do całek na przedziale nieskończonym lub całek z funkcji nieograniczonych. Poniżej zdefiniujemy całki niewłaściwe pierwszego i drugiego rodzaju, które spełniają te wymagania. W obu przypadkach korzystamy z faktu, że całkę oznaczoną możemy określić na dowolnym przedziale domkniętym, na którym dana funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna.

3.1.1 Całki niewłaściwe I rodzaju

Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju, to całki na przedziale nieograniczonym, to znaczy na przedziale $[a, \infty)$ lub $(-\infty, b]$ lub też $(-\infty, \infty)$. Całki te definiujemy następująco:

Definicja 3.1 *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $[a, \infty)$ i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a, b] \subset [a, \infty)$, $(b > a)$. Jeśli istnieje granica*

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą Riemana I rodzaju funkcji f na przedziale $[a, \infty)$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^\infty f(x)dx.$$

Zatem

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.} \tag{3.1}$$

W przypadku, gdy granica $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ istnieje mówmy, że całka jest zbieżna, a funkcję $f(x)$ nazywamy całkowalną w przedziale nieskończonym $[a,\infty)$.
Gdy granica nie istnieje lub jest niewłaściwa, mówimy, że całka jest rozbieżna.

Przykład 3.1 *Obliczyć całkę* $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx$.

Rozwiązanie

$\int x^{-4}dx =$
$= \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + C$
$= -\frac{x^{-3}}{3} + C$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-4}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{-3}x^{-3}\Bigg|_1^b = -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^3} - 1^{-3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Rozważana całka okazała się zbieżna (do $\frac{1}{3}$). □

Zupełnie analogicznie definuje się całki niewłaściwe pierwszego rodzaju na przedziale lewostronnie nieograniczonym $(-\infty, b]$.

Definicja 3.2 *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $(-\infty, b]$ i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a,b]\subset(-\infty,b]$, $(b>a)$. Jeśli istnieje granica*

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą Riemana I rodzaju funkcji f na przedziale $(-\infty, b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx.$$

Zatem

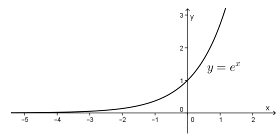
$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.} \tag{3.2}$$

Przykład 3.2 *Obliczyć całkę* $\int_{-\infty}^0 e^x dx$.

$\int e^x dx = e^x + C$

Rozwiązanie

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x \Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) = e^0 = 1.$$



Wykres funkcji $y = e^x$.

Nasza całka jest więc zbieżna (do 1). $\square$

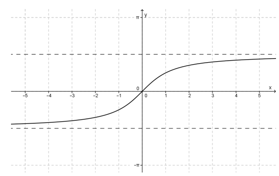
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Definicja 3.3 *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $(-\infty, \infty)$ i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a, b]$, $(b > a)$. Całkę niewłaściwą funkcji $f(x)$ na przedziale $(-\infty, \infty)$ definujemy za pomocą równości*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{-\infty} f(x)dx.} \tag{3.3}$$

dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$, zakładając, że obie całki po prawej stronie równości istnieją.

Uwaga 3.1 *Powyższa definicja nie zależy od wyboru $a \in \mathbb{R}$.*


Wykres funkcji $y = x$.

$\lim_{x\to-\infty}(\text{arctg}x) = \frac{-\pi}{2}$

$\lim_{x\to\infty}(\text{arctg}x) = \frac{\pi}{2}$

Przykład 3.3 *Obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.*

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzoru 3.3 przyjmując w nim $a = 0$. Otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Ponieważ $\int\frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + C$, to

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\mathrm{a}\to-\infty}(\text{arctg}x)\Big|_{\mathrm{a}}^{0} = \lim_{\mathrm{a}\to-\infty}(\text{arctg0} - \text{arctga}) = 0 - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}(\text{arctg}x)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\text{arctgb} - \text{arctg0}) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Zatem ostatecznie

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \qquad \square$$

3.1.2 Całki niewłaściwe II rodzaju

Całki niewłaściwe drugiego rodzaju, to całki funkcji nieograniczonej na przedziale ograniczonym $[a, b]$. Zdefiniujemy taką całkę w trzech możliwych przypadkach, gdy:

1. funkcja jest nieograniczona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu b,

2. funkcja jest nieograniczona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu a,

3. funkcja jest nieograniczona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu a i w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu b.

Definicja 3.4 *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $[a, b)$, $\quad a < b$ i nieograniczoną w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu b, a także ograniczoną i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a, b-\epsilon] \subset [a, b)$, $\quad 0 < \epsilon < b - a$. Jeśli istnieje granica*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą Riemana II rodzaju funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Zatem

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.} \tag{3.4}$$

Przykład 3.4 *Obliczyć całkę $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} dx$*

Rozwiązanie

Funkcja podcałkowa $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$ jest nieograniczona w lewostronnym sąsiedztwie punktu $x = 0$. Zatem nasza całka jest całką niewłaściwą drugiego rodzaju, więc

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Ponieważ

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} =^{-\frac{1}{3}}= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} x^{1-\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}} + C, \quad \text{to}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{3}{2}\lim_{\epsilon\to 0} x^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0-\epsilon} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\underbrace{(0-\epsilon)^{\frac{3}{2}}}_{\to 0} - \underbrace{(-1)^{\frac{3}{2}}}_{=-1}\right] = \frac{3}{2}. \qquad \square$$

Definicja 3.5 *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $(a, b]$, $\quad a < b$ i nieograniczoną w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu a, oraz ograniczoną i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a+\epsilon, b] \subset (a, b]$, $\quad 0 < \epsilon < b - a$. Jeśli istnieje granica*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą Riemana II rodzaju funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Zatem

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx.} \tag{3.5}$$

Przykład 3.5 *Obliczyć całkę $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.*

Rozwiązanie

Funkcja podcałkowa jest nieograniczona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu $x = 0$, więc nasza całka jest całką niewłaściwą drugiego rodzaju, stąd

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{0+\epsilon}^{1} \frac{1}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \ln|x|\Big|_{0+\epsilon}^{1} = \lim_{\epsilon\to 0^+}(\ln 1 - \ln(\epsilon)) = \infty.$$

$\ln 1 = 0$

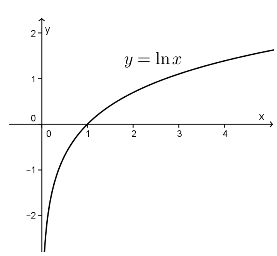
$\lim_{\epsilon\to 0^+} \ln x = -\infty$

Całka $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ jest zatem rozbieżna do nieskończoności. $\square$

Przykład 3.6 *Obliczyć całkę $\int_0^1 \ln x dx$.*

Rozwiązanie

Ponieważ funkcja podcałkowa $\ln x$ jest nieograniczona w prawostronnym sąsiedztwie punktu $x = 0$, to nasza całka jest całką niewłaściwą drugiego rodzaju, czyli



Wykres funkcji $y = \ln x$.

$$I = \int_0^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{0+\epsilon}^{1} \ln x dx.$$

Najpierw, stosując metodę całkowania przez części, obliczamy całkę nieoznaczoną

$$I = \int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = x \end{array} \right| = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx =$$
$$= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Wobec tego

$$I = \int_0^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{0+\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} [x(\ln x - 1)] \Big|_{\epsilon}^{1} =$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} [1 \cdot (\ln 1 - 1) - \epsilon \cdot (\ln \epsilon - 1)] = -1 - \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \ln \epsilon.$$

Ponieważ $\lim_{\epsilon \to 0} \ln \epsilon = -\infty$, to wyrażenie $\epsilon(\ln \epsilon - 1)$ dla ϵ dążącego do zera jest wyrażeniem nieoznaczonym typu $0 \cdot \infty$. Do obliczenia granicy tego wyrażenia nie możemy zastosować reguły de l'Hospitala[1]. Regułę tę można bowiem stosować tylko do wyrażeń nieoznaczonych typu $\frac{0}{0}$ oraz $\frac{\infty}{\infty}$. Przekształcamy więc nasze wyrażenie do postaci

$$\epsilon \ln \epsilon = \frac{\ln \epsilon}{\frac{1}{\epsilon}}$$

które jest wyrażeniem typu $\frac{\infty}{\infty}$, a następnie stosujemy regułę otrzymując

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \ln \epsilon = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\ln \epsilon}{\frac{1}{\epsilon}} \overset{H}{=} \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{(\ln \epsilon)'}{\left(\frac{1}{\epsilon}\right)'} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\frac{1}{\epsilon}}{\frac{-1}{\epsilon^2}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} (-\epsilon) = 0.$$

Ostatecznie, nasza całka

$$I = -1 - \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon(\ln \epsilon - 1) = -1$$

jest zbieżna do 1. $\square$

Definicja 3.6 *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale (a, b), $a < b$ i nieograniczoną w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu a i w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu b, a także ograniczoną i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a + \epsilon_1, b - \epsilon_2] \subset (a, b)$. Jeśli dla dowolnego punktu $c \in (a, b)$ istnieją całki niewłaściwe $\int_a^c f(x)dx$ oraz*

[1] Guillaume Francois Antoin de l'Hospital, matematyk francuski (1661-1704). Był autorem pierwszego podręcznika rachunku różniczkowego i całkowego „*Analyse des infinitement petits pour l'intelligence des lignes courbes*" wydanego w Paryżu, roku 1696.

$\int_c^b f(x)dx$, to całkę niewłaściwą funkcji $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ definiujemy następująco:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.} \tag{3.6}$$

Uwaga 3.2 *Powyższa definicja nie zależy od wyboru punktu $c \in (a,b)$.*

Przykład 3.7 *Obliczyć całkę $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.*

Rozwiązanie
Widzimy, że funkcja podcałkowa $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ jest nieograniczona zarówno w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu $x=-1$, jak i w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu $x=1$. Jest więc sumą całek niewłaściwych drugiego rodzaju w przedziałach $[-1,c]$ oraz $[c,1]$ dla dowolnego $c \in (-1,1)$. Przyjmując $c=0$ i oznaczając obliczaną całkę przez I mamy

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{I_2} .$$

Pamiętając, że $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + \mathrm{C}$ mamy kolejno

$$I_1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-1+\epsilon}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} (\arcsin 0 - \arcsin(-1+\epsilon)) =$$
$$= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} .$$
$$I_2 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} (\arcsin(1-\epsilon) - \arcsin 0) =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2} .$$

Zatem $\qquad I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \qquad \square$

3.2 Zadania rozwiązane

Zadanie 3.1 *Oblicz całkę $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$.*

Rozwiązanie
Najpierw obliczymy całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x\ln x}$