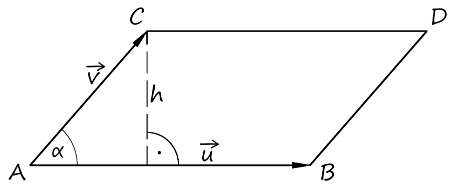
Interpretacja geometryczna iloczynu wektorowego

Weźmy dwa nierównoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ o wspólnym początku w punkcie A. Wyznaczają one równoległobok jak na rysunku 7.13.



Rysunek 7.13: Równoległobok wyznaczony przez dwa wektory

Pole tego równoległoboku jest równe

$$|P| = |\overrightarrow{u}| \cdot |h|$$

Ponieważ $|h| = |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, to

$$|P| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$$

Prawa strona otrzymanej równości jest długością wektora $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Udowodniliśmy zatem twierdzenie 7.7

Twierdzenie 7.7 *Pole równoległoboku wyznaczonego przez dwa nierównoległe wektory jest liczbowo równe długości iloczynu wektorowego tych wektorów*

$$|P| = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| \tag{7.11}$$

Wniosek 7.4 *Pole trójkata o wierzchołkach w punktach A, B, C nieleżących na jednej prostej jest równe*

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \tag{7.12}$$

7.1.6 Iloczyn mieszany wektorów

Definicja 7.11 *Iloczynem mieszanym wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ oraz $\overrightarrow{w}$ nazywamy liczbę*

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$$

Podstawowe własności iloczynu mieszanego podane są w poniższym twierdzeniu 7.8.

Twierdzenie 7.8 *Jeżeli*
$\vec{u} = [u_x, u_y, u_z], \quad \vec{v} = [v_x, v_y, v_z], \quad \vec{w} = [w_x, w_y, w_z] \in \mathbb{R}^3$, *to*

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \tag{7.13}$$

Ponadto,

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$$

Inną przydatną własność iloczynu mieszanego opisuje kolejne twierdzenie 7.9.

Twierdzenie 7.9 *Iloczyn mieszany trzech niezerowych wektorów o wspólnym początku jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy leżą w jednej płaszczyźnie.*

Definicja 7.12 *Trzy niezerowe wektory nazywamy komplanarnymi (współpłaszczyznowymi), gdy ich iloczyn mieszany jest równy zero.*

Przykład 7.4 *Sprawdzić, czy wektory* $\vec{u} = [2, 3, -1]$, $\vec{v} = [0, 2, 4]$ *oraz* $\vec{w} = [0, 0, 3]$ *są komplanarne.*

Rozwiązanie
Obliczamy iloczyn mieszany $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ tych wektorów. Korzystamy z faktu, że wyznacznik ma postaci trójkatną i otrzymujemy

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-3) = -12 \neq 0$$

Wynik różny od zera oznacza, że wektory nie leżą w jednej płaszczyźnie (nie są komplanarne). $\square$

Przykład 7.5 *Sprawdzić czy punkty* $A(1, 1, 3)$, $B(2, 4, 1)$, $C(-4, 5, 2)$ *oraz* $D(3, 2, 0)$ *leżą w tej samej płaszczyźnie.*

Rozwiązanie
Wyznaczymy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ oraz $\overrightarrow{AD}$ o wspólnym początku w punkcie A i skorzystamy z twierdzenia 7.9. Mamy kolejno

$$\overrightarrow{AB} = [2 - 1, 4 - 1, 1 - 3] = [1, 3, -2]$$

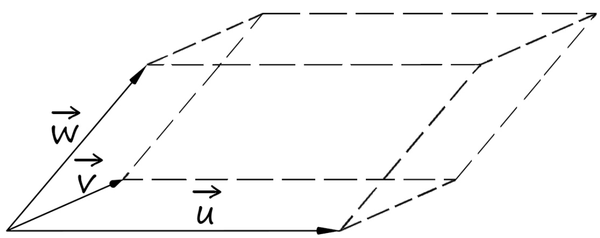
$$\overrightarrow{AC} = [-4 - 1, 5 - 1, 2 - 3] = [-5, 4, -1]$$

$$\overrightarrow{AD} = [3-1, 2-1, 0-3] = [2, 1, -3]$$

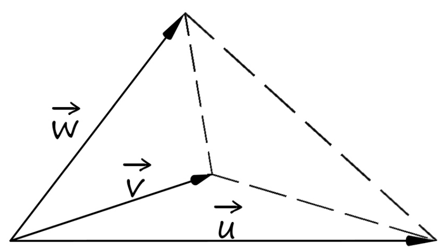
Wtedy $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$, co oznacza, że wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ oraz $\overrightarrow{AD}$ nie są komplanarne, więc dane punkty nie leżą w tej samej płaszczyźnie.
□

Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego

Zastanówmy się teraz co, geometrycznie, oznacza wynik ostatniego przykładu – trzy niezerowe i nierównoległe wektory o wspólnym początku nie leżące w tej samej płaszczyźnie. Każde dwa z nich oczywiście leżą w jakiejś płaszczyźnie, co więcej, wyznaczają pewien równoległobok. Wobec tego trzy wektory wyznaczają równoległościan jak na rysunku. Oczywiście wektory te wyznaczają też czworościan, którego wierzchołkami są początek i końce wektorów.



Rysunek 7.14: $V_{\text{równ}} = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$



Rysunek 7.15: $V_{\text{czw}} = \frac{1}{6}|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$

Iloczyn mieszany wykorzystujemy do obliczania objętości takiego równoległościanu i czworościanu

Twierdzenie 7.10 *Objętość równoległościanu wyznaczonego przez trzy niekomplanarne i nierównoległe wektory jest równa wartości bezwzględnej iloczynu mieszanego tych wektorów, a objętość czworościanu wyznaczonego przez te wektory jest równa jednej szóstej objętości wyznaczonego przez nie równoległościanu.*

Przykład 7.6 *Obliczyć objętość równoległościanu wyznaczonego przez wektory* $\vec{u} = [1, 2, 8]$, $\vec{v} = [3, 4, 9]$ *oraz* $\vec{w} = [5, 6, 7]$

Rozwiązanie
Skorzystamy ze wzoru podanego w twierdzeniu 7.8. Otrzymujemy

$$V_{\text{równ.}} = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}| = |6| = 6 \qquad \square$$

7.1.7 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie ogólne

Załóżmy, że dana jest płaszczyzna π, pewien punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ leżący w tej płaszczyźnie oraz wektor $\vec{v} = [A, B, C]^T \neq \vec{0}$ do tej płaszczyzny prostopadły. Pamiętając przy tym, że zarówno współrzędne punktu P_0 jak i wektora $\vec{v}$ są danymi liczbami, wyprowadzimy równanie opisujące płaszczyznę π. Przeprowadzimy w tym celu następujące proste rozumowanie.
Niech $P(x, y, z) \neq P_0$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny π. Wówczas

$$P \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \subset \pi \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Stąd

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [A, B, C] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{7.14}$$

Po przekształceniach mamy

$$Ax + By + Cz \underbrace{-Ax_0 - By_0 - Cz_0}_{=D} = 0,$$

czyli $(x, y, z) \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0$.

Widzimy zatem, że aby punkt $P(x, y, z)$ leżał w płaszczyźnie π jego współrzędne muszą spełniać równanie

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{7.15}$$

Zapis $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ oznacza, że płaszczyzna oznaczona literą π ma równanie $Ax + By + Cz + D = 0$

I na odwrót, jeśli współrzedne punktu spełniają równanie 7.15, to punkt należy do płaszczyzny π. Równanie to nazywamy równaniem ogólnym płaszczyzny π. Przypomnijmy, że w równaniu tym współczynniki A, B, C są współrzędnymi wektora normalnego (prostopadłego) do płaszczyzny π. Wektor normalny oznaczamy $\overrightarrow{n}$.

Przykład 7.7 *Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0(1, 2, 3)$ i prostopadłej do wektora $\overrightarrow{v} = [4, 5, 6]$.*

Rozwiązanie
Skorzystamy ze wzoru 7.14, w którym $A = 4,\ B = 5,\ C = 6$ oraz $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ z_0 = 3$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} 4(x-1) + 5(y-2) + 6(z-3) &= 0 \\ 4x - 4 + 5y - 10 + 6z - 18 &= 0 \\ 4x + 5y + 6z - 32 &= 0 \end{aligned}$$

Jest to szukane równanie naszej płaszczyzny. $\square$

Równanie odcinkowe

Postać odcinkowa równania płaszczyzny jest bardzo wygodna do naszkicowania jej w trójwymiarowym układzie współrzędnych. Jeśli w równaniu ogólnym płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$ wszystkie współczynniki A, B, C oraz D są różne od zera, to możemy przekształcić je nastepująco:

$$Ax + By + Cz = -D \mid : (-D)$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

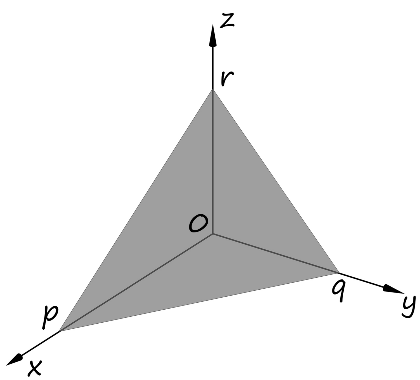
$$\frac{x}{\frac{A}{-D}} + \frac{y}{\frac{B}{-D}} + \frac{z}{\frac{C}{-D}} = 1$$

Przyjmując oznaczenia

$$\frac{A}{-D} = p \qquad \frac{B}{-D} = q \qquad \frac{C}{-D} = r$$

otrzymamy równanie naszej płaszczyzny w postaci odcinkowej

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \tag{7.16}$$



Rysunek 7.16: Interpretacja równania odcinkowego płaszczyzny

Nazwę równanie odcinkowe wyjaśnia powyższy rysunek, na którym widzimy, że liczby p, q, r są współrzednymi punktów, odpowiednio na osiach Ox, Oy, Oz, w których płaszczyzna te osie przecina.

Umiejętność szkicowania płaszczyzny o danym równaniu przydaje się na przykład przy obliczaniu całek podwójnych i potrójnych (wykorzystujemy wówczas fakt, że rzutem naszej płaszczyzny na płaszczyznę Oxy jest trójkąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(p, 0)$ oraz $(0, q)$.

Przykład 7.8 *Zapisz równanie płaszczyzny z poprzedniego przykładu w postaci odcinkowej, a następnie naszkicuj ją w układzie współrzednych.*

Rozwiązanie

Przekształcimy równanie do postaci odcinkowej

$$4x + 5y + 6z - 32 = 0$$

$$4x + 5y + 6z = 32| : 32$$

$$\frac{4x}{32} + \frac{5y}{32} + \frac{6z}{32} = 1$$

Stąd po skróceniu pierwszego ułamka przez 4, drugiego przez 5, a trzeciego przez 6 otrzymamy równanie naszej płaszczyzny w postaci odcinkowej

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{\frac{32}{5}} + \frac{z}{\frac{16}{3}} = 1$$